第28講　場合の数・確率(2)

1　AとBの二人が，1, 2, 3, 4の番号が1つずつ書かれた4枚のカードをそれぞれ持っているとする．お互いが自分のカードのうちから1枚を選んで同時に出す．次に，手元に残された3枚からまた1枚を選んで同時に出す．これをお互いの手持ちのカードがなくなるまでくり返す．この4回の試行について，次の問いに答えよ．

(1)　4回の試行のすべてで，AとBが出したカードの番号が一致する確率を求めよ．

(2)　4回の試行のうちちょうど2回で，AとBが出したカードの番号が一致する確率を求めよ．

(3)　4回の試行で，AとBが出したカードの番号が1回も一致しない確率を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　n は 2 以上の整数とする．1 が書かれたカードが 1 枚，2 が書かれたカードが 1 枚，……，$2n+1$ が書かれたカードが 1 枚の全部で $2n+1$ 枚のカードが袋の中に入っている．この袋から 2 枚のカードを同時に取り出すとき，次の問いに答えよ．

(1)　取り出した 2 枚のカードに書かれた整数が，両方とも奇数である確率を n を用いて表せ．

(2)　取り出した 2 枚のカードに書かれた整数の和が，偶数である確率を n を用いて表せ．

(3)　取り出した 2 枚のカードに書かれた整数の和が，7 以上の奇数である確率を n を用いて表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　さいころを投げることをくり返し，出た目の和が5以上になったら終わることにする．次の問いに答えよ．

(1)　2回投げて終わる確率を求めよ．

(2)　3回投げて終わる確率を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 28 講　場合の数・確率(2)

［1］ a, b, c, d の本が 1 冊ずつある．A 君と B 君はこれら 4 冊の本を 1 日 1 冊ずつ読み，A 君も B 君も 4 冊の本すべてを読むこととする．このとき，ちょうど 4 日間で A 君も B 君もすべての本を読み終わる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．

［2］ さいころを 3 回投げる．このとき，偶数の目がちょうど 2 回出るという事象を A，4 以上の目が少なくとも 1 回は出るという事象を B とすると，事象 $A\cap B$ の起こる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である．

［3］ n を正の整数とする．1 から $(2n+1)$ までの番号を 1 つ書いた $(2n+1)$ 枚のカードが箱の中に入っている．この箱の中からカードを 1 枚取り出してもとに戻すという試行を 3 回行い，取り出したカードの番号の中で最大のものを X とおく．このとき $X\leqq 2$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{(2n+1)^3}$，$X=2$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{(2n+1)^3}$ である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 28 講　場合の数・確率(2)

1　A と B の二人が，1，2，3，4 の番号が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードをそれぞれ持っているとする．お互いが自分のカードのうちから 1 枚を選んで同時に出す．次に，手元に残された 3 枚からまた 1 枚を選んで同時に出す．これをお互いの手持ちのカードがなくなるまでくり返す．この 4 回の試行について，次の問いに答えよ．

(1)　4 回の試行のすべてで，A と B が出したカードの番号が一致する確率を求めよ．

(2)　4 回の試行のうちちょうど 2 回で，A と B が出したカードの番号が一致する確率を求めよ．

(3)　4 回の試行で，A と B が出したカードの番号が 1 回も一致しない確率を求めよ．

4 回の試行の 2 人のカードの出し方は $4!\times4!$ 通り

(1)　4 回の試行のすべてで 2 人のカードが一致するのは

A のカードの出し方 $4!$ 通りだけある．

よって求める確率は　$\dfrac{4!}{4!\times4!}=\mathbf{\dfrac{1}{24}}$

(2)　4 回の試行における A のカードの出し方 $4!$ 通りに対して，

番号が一致する 2 枚のカードの選び方が ${}_4C_2$ 通り．

残り 2 枚のカードが一致しない並べ方は 1 通り．

よって求める確率は　$\dfrac{4!\times{}_4C_2\times1}{4!\times4!}=\mathbf{\dfrac{1}{4}}$

(3)　A が $1\to2\to3\to4$ の順に出したとする．

これに対して，番号が 1 回も一致しない B の出し方は

B が 1 回目に 2 を出した場合，

$2\to1\to4\to3$，　$2\to3\to4\to1$，　$2\to4\to1\to3$

の 3 通り．

1 回目に 3，4 を出した場合も同様であり，また A の出し方によらず同様である．

よって求める確率は　$\dfrac{4!\times3\times3}{4!\times4!}=\mathbf{\dfrac{3}{8}}$

(別解)　A の出し方に対し，1 回のみ一致する B のカードの出し方は 4×2 通りで，

その確率は　$\dfrac{4!\times4\times2}{4!\times4!}=\dfrac{1}{3}$

この確率および(1)，(2)の確率の余事象が，求める確率の事象である．

したがって，求める確率は　$1-\left(\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{3}{8}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 n は 2 以上の整数とする．1 が書かれたカードが 1 枚，2 が書かれたカードが 1 枚，……，$2n+1$ が書かれたカードが 1 枚の全部で $2n+1$ 枚のカードが袋の中に入っている．この袋から 2 枚のカードを同時に取り出すとき，次の問いに答えよ．

(1) 取り出した 2 枚のカードに書かれた整数が，両方とも奇数である確率を n を用いて表せ．

(2) 取り出した 2 枚のカードに書かれた整数の和が，偶数である確率を n を用いて表せ．

(3) 取り出した 2 枚のカードに書かれた整数の和が，7 以上の奇数である確率を n を用いて表せ．

$2n+1$ 枚のカードのうち，奇数は $n+1$ 枚，偶数は n 枚ある．

(1) 求める確率は $\dfrac{{}_{n+1}\mathrm{C}_2}{{}_{2n+1}\mathrm{C}_2}=\dfrac{\dfrac{(n+1)\cdot n}{2\cdot 1}}{\dfrac{(2n+1)\cdot 2n}{2\cdot 1}}=\boldsymbol{\dfrac{n+1}{2(2n+1)}}$

(2) 2 枚のカードの和が偶数になるのは，両方とも偶数，または両方とも奇数のときである．

両方とも偶数である確率は $\dfrac{{}_{n}\mathrm{C}_2}{{}_{2n+1}\mathrm{C}_2}=\dfrac{\dfrac{n(n-1)}{2\cdot 1}}{\dfrac{(2n+1)\cdot 2n}{2\cdot 1}}=\dfrac{n-1}{2(2n+1)}$

よって求める確率は $\dfrac{n+1}{2(2n+1)}+\dfrac{n-1}{2(2n+1)}=\boldsymbol{\dfrac{n}{2n+1}}$

(3) 2 枚のカードの和が奇数になる確率は，(2)より

$$1-\frac{n}{2n+1}=\frac{n+1}{2n+1}$$

2 枚のカードの和が 7 未満の奇数になるのは，次のとき

(i) 和が 3 のとき　　(ii) 和が 5 のとき

(i)のとき　2 枚のカードが 1 と 2 の 1 通りのみ

(ii)のとき　2 枚のカードが 4 と 1，3 と 2 の 2 通り

よって 2 枚のカードの和が 7 未満の奇数になる確率は $\dfrac{3}{{}_{2n+1}\mathrm{C}_2}=\dfrac{3}{n(2n+1)}$

したがって，2 枚のカードが 7 以上の奇数である確率は

$$\frac{n+1}{2n+1}-\frac{3}{n(2n+1)}=\frac{n(n+1)-3}{n(2n+1)}=\boldsymbol{\frac{n^2+n-3}{n(2n+1)}}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　さいころを投げることをくり返し，出た目の和が5以上になったら終わることにする．次の問いに答えよ．
(1)　2回投げて終わる確率を求めよ．
(2)　3回投げて終わる確率を求めよ．

(1)　2回投げて終わるのは
1回目の出目が1のとき，2回目の出目が4～6
1回目の出目が2のとき，2回目の出目が3～6
1回目の出目が3のとき，2回目の出目が2～6
1回目の出目が4のとき，2回目の出目が1～6
よって，2回投げて終わる確率は

$$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{6}{6}=\frac{1}{6}\left(\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}+\frac{6}{6}\right)=\frac{1}{6}\times\frac{18}{6}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

(別解)　2回投げても終わらないのは，
(1回目の出目，2回目の出目)＝(1，1)，(1，2)，(1，3)，(2，1)，(2，2)，(3，1)
の6通りで，その確率は　$\frac{6}{6^2}=\frac{1}{6}$
よって，2回以下で終わる確率は　$1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$
また，1回投げて終わるのは，その出目が5または6のときで，その確率は
$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
よって，2回投げて終わる確率は　$\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

(2)　3回投げても終わらないのは，
(1回目の出目，2回目の出目，3回目の出目)
＝(1，1，1)，(1，1，2)，(1，2，1)，(2，1，1)
の4通りである．よって，3回以下で終わる確率は　$1-\frac{4}{6^3}=\frac{53}{54}$
また，2回以下で終わる確率は，(1)の(別解)より　$\frac{5}{6}$
よって，3回投げて終わる確率は　$\frac{53}{54}-\frac{5}{6}=\mathbf{\frac{4}{27}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第28講　場合の数・確率(2)

［1］ a, b, c, d の本が1冊ずつある．A君とB君はこれら4冊の本を1日1冊ずつ読み，A君もB君も4冊の本すべてを読むこととする．このとき，ちょうど4日間でA君もB君もすべての本を読み終わる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である．

［2］ さいころを3回投げる．このとき，偶数の目がちょうど2回出るという事象を A，4以上の目が少なくとも1回は出るという事象を B とすると，事象 $A\cap B$ の起こる確率は $\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オカ}}$ である．

［3］ n を正の整数とする．1から $(2n+1)$ までの番号を1つ書いた $(2n+1)$ 枚のカードが箱の中に入っている．この箱の中からカードを1枚取り出してもとに戻すという試行を3回行い，取り出したカードの番号の中で最大のものを X とおく．このとき $X\leqq 2$ である確率は $\dfrac{\boxed{キ}}{(2n+1)^3}$，$X=2$ である確率は $\dfrac{\boxed{ク}}{(2n+1)^3}$ である．

解答例

［1］ A君，B君の本の読み方はそれぞれ $4!$ 通り．

A君が $a,\ b,\ c,\ d$ の順に本を読むとすると，B君が1日目に b の本を読むとき，A君と読む本が重ならないのは $b,\ a,\ d,\ c$ の順，$b,\ c,\ d,\ a$ の順，$b,\ d,\ a,\ c$ の順の3通りだけである．B君が1日目に $c,\ d$ を読むときも同様にそれぞれ3通り．

A君が他の順番で読んだ場合も同様である．したがって求める確率は $\dfrac{4!\times3\times3}{4!\times4!}=\mathbf{\dfrac{3}{8}}$

［2］ 事象 $A\cap B$ の起こる確率を $P(A\cap B)$ と表すとすると，

求める確率は $P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap\overline{B})$ と表される．

$A\cap\overline{B}$ は「偶数の目がちょうど2回 かつ すべて3以下」という事象を表し，それは2が2回，1または3が1回出ることを表す．

したがって求める確率は　$P(A\cap B)={}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{3}{6}\right)^2\cdot\dfrac{3}{6}-{}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\cdot\dfrac{2}{6}=\dfrac{81-6}{216}=\mathbf{\dfrac{25}{72}}$

［3］ $X\leqq2$ となるのは，3回とも1または2を取り出したときで，

その確率は　$\left(\dfrac{2}{2n+1}\right)^3=\mathbf{\dfrac{8}{(2n+1)^3}}$

また，$X=1$ となるのは　3回とも1を取り出したときで，

その確率は　$\left(\dfrac{1}{2n+1}\right)^3=\dfrac{1}{(2n+1)^3}$

したがって求める確率は　$\dfrac{8}{(2n+1)^3}-\dfrac{1}{(2n+1)^3}=\mathbf{\dfrac{7}{(2n+1)^3}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。